Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.
MA-1111.Tipo A1

Nombre: Carnet Sección:

TERCER EXAMEN PARCIAL MA-1111
(40%)

Conteste las siguientes preguntas justificando detalladamente sus respuestas.

1.- (4 Puntos. c/u) Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt[3]{\tan^3 x^2 + 1}$ b) $f(x) = arc\,sen(xsen(x) + 4)$

2.- Sea la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x}$ determine:

a) (2 Pts) Dominio
b) (2 Pts) Intersecciones con los ejes
c) (3 Pts) Asíntotas
d) (2 Pts) Puntos críticos
e) (3 Pts) Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento
f) (2 Pts) Extremos: Puntos Máximos y Mínimos
g) (2 Pts) Puntos de Inflexión
h) (2 Pts) Concavidades
i) (2 Pts) Elabore la grafica

3.- (6 Puntos) Encontrar la recta tangente a la curva de ecuación $x^2 + xy + 4y^2 = 10$ en el punto (2,1)

4.- (6 Puntos) Un hombre tiene 240 metros de cerco para circundar un área rectangular y dividirla en dos partes mediante una cerca paralela a uno de los lados. ¿Que dimensiones debe tener el rectángulo para que el área cercada sea máxima?

SOLUCIÓN TERCER EXAMEN PARCIAL MA-1111 Tipo A1
(40%)

1) a) $f'(x) = \dfrac{2x\ tan^2 x^2\ \ sec^2 x^2}{(tag^3 x^2 + 1)^{\frac{2}{3}}}$ b) $f'(x) = \dfrac{sen(x) + x\,cos(x)}{\sqrt{1 - (xsen(x) + 4)^2}}$

2) a)Dominio: R-{0}

b) No tiene intersecciones con el eje y

Intersección con el eje x:
$\left(\sqrt[3]{-2}, 0\right) \approx (-1.3, 0)$

c) Asíntotas:
$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{1}{x}\left(x^3 + 2\right) = \infty$ $\lim_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{1}{x}\left(x^3 + 2\right) = -\infty$

Por lo tanto $x = 0$ es una asíntota vertical

No tiene asíntota horizontal, ni oblicua.

d) Puntos Críticos:
$f'(x) = \dfrac{2\left(x^3 - 1\right)}{x^2}$, $f'(x) = 0 \quad en \quad x = 1$ por lo tanto x = 1 es un punto crítico estacionario

e) Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento

$f(x)$ Crece en $(1, \infty)$ y decrece en $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

f) Extremos: puntos máximos y mínimos

$f(1) = 3$ Es un valor mínimo (Criterio de la Primera Derivada)

g) Puntos de inflexión
$f''(x) = \dfrac{2\left(x^3 + 2\right)}{x^3}$,
$f''(x) = 0 \quad si \quad x^3 = -2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{-2} \approx -1.3$ Es un punto de inflexión

h) Concavidades
$f(x)$ es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1.3) \cup (0, \infty)$ y cóncava hacia abajo (convexa) en $(-1.3, 0)$

3) $2x + y + \frac{dy}{dx}x + 8y\frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{dy}{dx}(x + 8y) = -2x - y$$

Evaluando en el punto (2,1) se tiene que $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$ que es la pendiente de la recta tangente a la curva $x^2 + xy + 4y^2 = 10$,

así la ecuación de esta recta es $(y-1) = -\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow 2y + x - 4 = 0$

4) $3a + 2b = 240 \Rightarrow a = \frac{240 - 2b}{3}$

$$f(b) = b\left(\frac{240}{3} - \frac{2}{3}b\right)$$

$$f'(b) = 80 - \frac{4}{3}b$$

$$f'(b) = 0 \Rightarrow b = 60 \Rightarrow a = 40$$

$$f''(b) = \frac{-4}{3} < 0$$

Por lo tanto, las dimensiones para que el área cercada sea máxima son 40*60

Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.
MA-1111.Tipo A2

Nombre: Carnet Sección:

TERCER EXAMEN PARCIAL MA-1111
(40%)

Conteste las siguientes preguntas justificando detalladamente sus respuestas.

1.- (4 Puntos. c/u) Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt[3]{\cos^3 x^3 + 1}$ b) $f(x) = arc\,sen\left(x^2 \tan(7x-1)+3\right)$

2.- Sea la función $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$ determine:

j) (2 Pts) Dominio
k) (2 Pts) Intersecciones con los ejes
l) (3 Pts) Asíntotas
m) (3 Pts) Puntos críticos
n) (2 Pts) Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento
o) (2 Pts) Extremos: Puntos Máximos y Mínimos
p) (2 Pts) Concavidades
q) (2 Pts) Puntos de Inflexión
r) (2 Pts) Elabore la grafica

3.- (6 Puntos) Encontrar la recta tangente a la curva de ecuación $x^2 + xy + 4y^2 = 4$ en el punto (2,0)

4.- (6 Puntos) Un hombre tiene 120 metros de cerco para circundar un área rectangular y dividirla en dos partes mediante una cerca paralela a uno de los lados. ¿Que dimensiones debe tener el rectángulo para que el área cercada sea máxima?

SOLUCIÓN TERCER EXAMEN PARCIAL MA-1111 Tipo A2
(40%)

1) a) $f'(x) = \dfrac{-3x^2\cos^2 x^3 sen x^3}{(\cos^3 x^3 + 1)^{\frac{2}{3}}}$ b) $f'(x) = \dfrac{2x\tan(7x-1) + 7x^2\sec^2(7x-1)}{\sqrt{1-(x^2\tan(7x-1)+3)^2}}$

3) a)Dominio: R-{0}

b) No tiene intersecciones con el eje y
Punto intersección con el eje x: $(-1,0)$

c) Asíntotas:

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{1}{x}(x^3+1) = \infty$ $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{1}{x}(x^3+1) = -\infty$

$\therefore$ $x = 0$ es una asíntota vertical
No tiene asíntota horizontal, ni oblicua.

d) Puntos Críticos:

$f'(x) = \dfrac{2x^3-1}{x^2}$,

$f'(x) = 0 \quad en \;\; x = \sqrt[3]{1/2} \approx 0.793 \quad \Rightarrow x \approx 0.793$ es un punto crítico estacionario

e) Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento

$f(x)$ Decrece en $(-\infty, 0)\,\Upsilon\,(0; 0.79)$ y crece en $(0.79, \infty)$

f) Extremos: puntos máximos y mínimos

$f(0.793) = 1.88$ es un valor mínimo (Criterio de la Primera Derivada)

g) Puntos de inflexión

$f''(x) = \dfrac{2(x^3+1)}{x^3}$, $f''(x) = 0 \quad si \;\; x^3 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-1} = -1$ es un punto de inflexión

h) Concavidades
$f(x)$ es cóncava hacia arriba en $(-\infty,-1)\Upsilon(0,\infty)$ y cóncava hacia abajo (convexa) en $(-1,0)$

3)

$$2x + y + \frac{dy}{dx}x + 8y\frac{dy}{dx} = 0$$
,
$$\frac{dy}{dx}(x + 8y) = -2x - y$$

Evaluando en el punto (2,0) se tiene que $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{2} = -2$ que es la pendiente de la recta tangente a la curva $x^2 + xy + 4y^2 = 4$,

así la ecuación de esta recta es $y = -2(x - 2) \Rightarrow y + 2x - 4 = 0$

4) $3a + 2b = 120 \Rightarrow a = \frac{120 - 2b}{3}$

$$f(b) = b\left(\frac{120}{3} - \frac{2}{3}b\right)$$

$$f'(b) = 40 - \frac{4}{3}b$$

$$f'(b) = 0 \Rightarrow b = 30 \Rightarrow a = 20$$

$$f''(b) = \frac{-4}{3} < 0$$

Por lo tanto, las dimensiones para que el área cercada sea máxima son 20*30

Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.
MA-1111.Tipo B1

Nombre: Carnet Sección:

TERCER EXAMEN PARCIAL MA-1111
(40%)

Conteste las siguientes preguntas justificando detalladamente sus respuestas.

1.- (4 Puntos. c/u) Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = arc\ sen\sqrt{\tan^3(x^4+5)^2}$ b) $f(x) = sen^3(\cos\sqrt{7x})$

2.- Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{x-1}$ determine:

s) (2 Pts) Dominio
t) (2 Pts) Intersecciones con los ejes
u) (3 Pts) Asíntotas
v) (3 Pts) Puntos críticos
w) (2 Pts) Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento
x) (2 Pts) Extremos: Puntos Máximos y Mínimos
y) (2 Pts) Concavidades
z) (2 Pts) Puntos de Inflexión
aa) (2 Pts) Elabore la gráfica

3.-(6 Puntos) Encontrar la recta tangente a la curva de ecuación
$y^2x^2 - 9 = -x^3y^2 - 7y$ en el punto (1,1)

4.- (6 Puntos) Hallar las dimensiones de un triangulo rectángulo de área máxima dada su hipotenusa h.

SOLUCIÓN TERCER EXAMEN PARCIAL MA-1111 Tipo B1 (40%)

1) a) $f'(x)=\dfrac{12x^3(x^4+5)(\tan(x^4+5)^2)^{\frac{1}{2}}\sec^2(x^4+5)^2}{\sqrt{1-(\tan(x^4+5)^2)^2}}$

b) $f'(x)=-\dfrac{21\,sen\sqrt{7x}}{2\sqrt{7x}}\cos(\cos\sqrt{7x})\,sen^2(\cos\sqrt{7x})$

2) a) Dominio: R-{1}

b)Intersecciones: (0, - 4); (2,0)

c) Asíntotas:

$\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}\dfrac{1}{x-1}(x-2)^2=\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}\dfrac{1}{x-1}(x-2)^2=-\infty$

Por lo tanto x=1 es una asíntota vertical

No tiene asuntota horizontal

$a=\lim\limits_{x\longrightarrow\infty^+}\dfrac{f(x)}{x}=1$; $\quad b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=-3$;

Así $y = x -3$ es una asíntota oblicua

d) Puntos críticos

$f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(x)=0 \quad en\ x=0 \quad y \quad en \quad x=2$ por lo tanto estos son los valores críticos estacionarios de la función

e) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
$f(x)$ crece en $(-\infty,0)\,y\ en\ (2,\infty)$. Decrece en (0,1) y en $(1,2)$

f) Extremos: Puntos Máximos y Mínimos

f(0) = - 4 es un valor máximo y *f*(2) = 0 es un valor mínimo

g) Puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}$ si $f''(x)\neq 0$ por lo tanto la función no tiene puntos de inflexión

h) Concavidades

$f(x)$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty,1)$ y cóncava hacia arriba en $(1,\infty)$

3) $y^2x^2 - 9 = -x^3y^2 - 7y$

$$2y\frac{dy}{dx}x^2 + y^2 2x = -3x^2y^2 - x^3 2y\frac{dy}{dx} - 7\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}(2yx^2 + 2yx^3 + 7) = -3x^2y^2 - 2xy^2$$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3x^2y^2 - 2xy^2}{(2yx^2 + 2yx^3 + 7)}$ Evaluando en el punto (1,1) se tiene que la pendiente de la recta tangente a la curva $y^2x^2 - 9 = -x^3y^2 - 7y$ en el punto (1,1) es m = $\dfrac{-5}{11}$

Así la ecuación de la recta es $(y-1) = \dfrac{-5}{11}(x-1) \Rightarrow 5x + 11y - 16 = 0$ es la ecuación de la recta tangente a $y^2x^2 - 9 = -x^3y^2 - 7y$ en (1,1).

4) Área = (base * altura)/2

Sea a = altura, b=base y h = hipotenusa.

Como es un triangulo rectángulo se cumple que

$$h^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow b^2 = h^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{h^2 - a^2}$$

$$f(a) = \frac{\sqrt{h^2 - a^2}\,a}{2} = \frac{\sqrt{a^2(h^2 - a^2)}}{2}$$

$$f'(a) = \frac{a(h^2 - 2a^2)}{2\sqrt{a^2(h^2 - a^2)}} \Rightarrow f'(a) = 0 \text{ si } a = 0 \text{ ó } a = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

$$f''(a) = \frac{a(-7h^2 + 6a^2)}{4(h^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$f''\left(\dfrac{h}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{-h}{\sqrt{2}4} < 0$ por lo tanto el rectángulo de área máxima es aquel que tiene catetos iguales a $a = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$ y $b = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$

Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.
MA-1111.Tipo B2
Nombre: Carnet Sección:

TERCER EXAMEN PARCIAL MA-1111
(40%)

Conteste las siguientes preguntas justificando detalladamente sus respuestas.

1.- (4 Puntos c/u) Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = \cos(tag(\sqrt{x^7}))$ b) $arcSen(Sec(\sqrt{x^7} + 2))$

2.- Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x + 1}$ determine:

bb) (2 Pts) Dominio
cc) (2 Pts) Intersecciones con los ejes
dd) (3 Pts) Asíntotas
ee) (3 Pts) Puntos críticos
ff) (2 Pts) Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento
gg) (2 Pts) Extremos: Puntos Máximos y Mínimos
hh) (2 Pts) Concavidades
ii) (2 Pts) Puntos de Inflexión
jj) (2 Pts) Elabore la grafica

3.- (6 Puntos) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y^2 + 1 = x^3 + 2xy$ en el punto (1,2)

4.- (6 Puntos) Hallar un triangulo rectángulo de área máxima dada su hipotenusa, 2

SOLUCIÓN TERCER EXAMEN PARCIAL MA-1111 Tipo B2
(40%)

1) a) $\dfrac{sen\left(tag\left(\sqrt{x^7}\right)\right)\sec^2\left(\sqrt{x^7}\right)7x^6}{2\sqrt{x^7}}$ b) $f'(x)=\dfrac{7x^6\,Sec(\sqrt{x^7}+2)Tag(\sqrt{x^7}+2)}{\sqrt{1-Sec^2(\sqrt{x^7}+2)}}$

2) a) Dominio: R-{-1}
b) Intersecciones: (0,4); (-2,0)
c) Asíntotas:

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+}\frac{1}{x-1}(x+2)^2=\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow -1^-}\frac{1}{x-1}(x+2)^2=-\infty$$

Por lo tanto x= -1 es una asíntota vertical
No tiene asuntota horizontal

$a=\lim\limits_{x\longrightarrow\infty^+}\dfrac{f(x)}{x}=1$; $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=3$;

Así $y = x +3$ es una asíntota oblicua

d) Puntos críticos

$$f'(x)=\frac{x(x+2)}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=0, x=-2$$

e) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
$f(x)$ crece en $(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$ y decrece en (-2,0)

f) Extremos: Puntos Máximos y Mínimos

f(-2) es un máximo y f(0) es un mínimo

g) Puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{2}{(x+1)^3}$ si $f''(x)\neq 0$ por lo tanto no hay puntos de inflexión

h) Concavidades

$f(x)$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty,-1)$ y decrece en $(-1,\infty)$

3) $y^2 + 1 = x^3 + 2xy$

$$2y\frac{\partial y}{\partial x} = 3x^2 + 2y + 2x\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(2y - 2x) = 3x^2 + 2y$$

$\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{3x^2 + 2y}{2y - 2x}$ se tiene que la pendiente de la recta tangente a la curva en x = 1 y $y = 2$ es m = $\dfrac{7}{2}$

Así la ecuación de la recta tangente a la curva dada es
$(y-2) = \frac{7}{2}(x-1) \Rightarrow 7x - 2y - 3 = 0$ en el punto (1,2).

4) Área = (base * altura)/2

Sea a = altura, b=base y h = hipotenusa.

Como es un triangulo rectángulo se cumple que
$h^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow b^2 = h^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{h^2 - a^2}$

$$f(a) = \frac{\sqrt{h^2 - a^2}\,a}{2} = \frac{\sqrt{a^2\left(h^2 - a^2\right)}}{2}$$

$$f'(a) = \frac{a\left(h^2 - 2a^2\right)}{2\sqrt{a^2\left(h^2 - a^2\right)}} \Rightarrow f'(a) = 0 \text{ si } a = 0 \text{ ó } a = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

$$f''(a) = \frac{a\left(-7h^2 + 6a^2\right)}{4\left(h^2 - a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$f''\left(\dfrac{h}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{-h}{\sqrt{2}4} < 0$ por lo tanto el rectángulo de área máxima es aquel que tiene catetos iguales a $a = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$ y $b = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$ donde h =2, por lo tanto $a = \sqrt{2}$ y $b = \sqrt{2}$

Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.
MA-1111.Tipo C1

Nombre: Carnet Sección:

TERCER EXAMEN PARCIAL MA-1111
(40%)

Conteste las siguientes preguntas justificando detalladamente sus respuestas.

1. (4 ptos. c/u) Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = arc\ sen\ (\ \sqrt{1+5 sen\ (1+x^2}\ )$ b) $f(x) = sen\ (sen(sen\ x^2))$

2. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x+1}$ Determine:

a) (2 pto.) Dominio
b) (2 pto.) Intersecciones con los ejes
c) (2 ptos.) Asíntotas
d) (2 ptos.) Puntos Críticos
e) (3 pto.) Intervalos de Crecimiento o Decrecimiento
f) (2 ptos) Extremos: Puntos Máximos y Mínimos
g) (2 ptos.) Concavidades
h) (2 ptos.) Puntos de Inflexión
i) (3 ptos.) Elabore la gráfica.

3. (6 Puntos). Hallar $\dfrac{dy}{dx}$, si $y = f(x)$ es derivable y está definida implícitamente por la ecuación $-7x^2 y^3 = Cos(x+y)$

4. (6 puntos). Muestre que entre todos los rectángulos que tienen un perímetro dado, el cuadrado es el de área máxima.

SOLUCIÓN TERCER EXAMEN PARCIAL MA-1111 Tipo C1
(40%)

1.-Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = arc\,sen\,(\sqrt{1+5\,sen\,(1+x^2}\,)$

b) $f(x) = sen\,(sen(sen\;x^2))$

(4 ptos.c/u)

a) $f'(x) = \dfrac{(\sqrt{1+5\,sen\,(1+x^2}\,)'}{\sqrt{1-(\sqrt{1+5\,sen\,(1+x^2}\,)^2}} = \dfrac{\frac{1}{2}(1+5\,sen\,(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.(5\,cos(1+x^2).2x}{\sqrt{5\,sen\,(1+x^2)}}$

$= \dfrac{5x\cos(1+x^2)}{\sqrt{5\,sen\,(1+x^2)}\;(\sqrt{1+5\,sen\,(1+x^2}\,)}$

b) $f'(x) = 2x\cos x^2\;\cos(sen\,x^2)\;\cos(sen(sen\,x^2))$

2.- Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x+1}$ Determine:

a) (1 punto) Dominio de la función
$\{\forall x \in \Re \,/\, x \neq -1\}$

b) (1 punto.) Intersecciones con los ejes
Los puntos (1,0) y (0,1)

c) (2 puntos.) Asíntotas
Asíntota Vertical $x = -1$

Asíntotas Oblicuas

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x} = 1 = m$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x+1-x^2-x}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x+1}{x+1} = -3$

Por lo tanto $y = x-3$ es una Asíntota Oblicua.

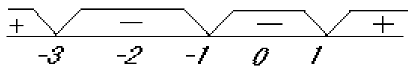
d) (2 puntos.) Puntos Críticos:

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x+1)-(x^2-2x+1)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

Puntos Críticos Estacionarios $x=1$ y $x=-3$

e) (2 puntos.) Intervalos de Crecimiento o Decrecimiento

$$f'(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$



La función f Crece en $(-\infty,-3)$ y en $(1,+\infty)$. Decrece $(-3,-1)$ y en $(-1,1)$

g) . (2 puntos) Extremos: Puntos Máximos y Mínimos

Como $f'(-3)=0$ y $f''(-3)<0$; $f'(1)=0$ y $f''(1)>0$ por el Criterio de la Segunda Derivada la función adquiere un máximo en el punto (-3,-8) y un mínimo en el punto (1,0)

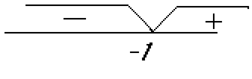
h) (2 puntos) Puntos de inflexión.

$$f''(x)=\frac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x-3)(2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{8}{(x+1)^3}$$

$f''(x)\neq 0$ No existen puntos de inflexión

j) (2 puntos) Concavidades

$$f''(x)=\frac{8}{(x+1)^3}$$



La función $f(x)$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty,-1)$ y es Cóncava hacia arriba en el intervalo $(-1,+\infty)$

k) (2 puntos) Elabore la gráfica.

3. Se tiene que $-7x^2y^3=Cos(x+y)$

$$-14xy^3 - 7x^2 3y^2 \frac{dy}{dx} = -(1+\frac{dy}{dx})Sen(x+y)$$

$$14xy^3 + 21x^2 y^2 \frac{dy}{dx} = Sen(x+y) + \frac{dy}{dx}Sen(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx}(Sen(x+y) - 21x^2 y^2) = 14xy^3 - Sen(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{14xy^3 - Sen(x+y)}{Sen(x+y) - 21x^2 y^2}$$

(6 Puntos)

4.- Muestre que entre todos los rectángulos que tienen un perímetro dado, el cuadrado es el de área máxima. (6 puntos)

Sean x e y las dimensiones del rectángulo, P el perímetro y A el área.

El perímetro de un rectángulo viene dado por P = 2x + 2y y el área $A = xy$

P = 2x + 2y ; $y = \frac{P-2x}{2}$; $A = xy$, $A = \frac{x(P-2x)}{2} = \frac{Px-2x^2}{2}$

$\frac{dA}{dx} = \frac{P-4x}{2}$; Si $\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{P}{4}$ (Valor crítico)

Reemplazando en 2x + 2y = P se tiene $y = \frac{P}{4}$ Por lo tanto el rectángulo es un cuadrado.

$\frac{d^2A}{d^2x} = \frac{-4}{2} = -2 < 0$ Por lo que $x = \frac{P}{4}$ es un máximo local.

Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.
MA-1111.Tipo C2

Nombre: Carnet Sección:

TERCER EXAMEN PARCIAL MA-1111
(40%)

Conteste las siguientes preguntas justificando detalladamente sus respuestas.

1. (4 ptos. c/u) Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = arc\tan\left(\sqrt{1+5\,sen\,(1-x^2)}\right)$ b) $f(x) = \cos(\cos(\cos x^2))$

2. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x+1}$ Determine:

a) (2 pto.) Dominio
b) (2 pto.) Intersecciones con los ejes
c) (2 ptos.) Asíntotas
d) (2 ptos.) Puntos Críticos
e) (3 pto.) Intervalos de Crecimiento o Decrecimiento
f) (2 ptos) Extremos: Puntos Máximos y Mínimos
g) (2 ptos.) Concavidades
h) (2 ptos.) Puntos de Inflexión
i) (3 ptos.) Elabore la gráfica.

3. (6 Puntos). Hallar $\dfrac{dy}{dx}$, si $y = f(x)$ es derivable y está definida implícitamente por la ecuación $-4x^3y^2 = sen(x+y)$

4. (6 puntos). Muestre que entre todos los rectángulos de área dada el cuadrado es el de perímetro mínimo.

SOLUCIÓN TERCER EXAMEN PARCIAL MA-1111 Tipo C2
(40%)

1.-Derive las siguientes funciones:

a) $$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{1+5sen\,(1-x^2)}\right)'}{1+\left(\sqrt{1+5sen\,(1-x^2)}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}(1+5sen\,(1-x^2))^{-\frac{1}{2}}.(-5\cos(1-x^2).2x}{2+5sen\,(1-x^2)}$$

$$\frac{(-5x\,cos(1-x^2)\,)}{\sqrt{1+5sen\,(1-x^2}\,)\,(\,2+5sen\,(1-x^2\,))}$$

b) $f'(x)=-2x\,sen\,x^2\;\;sen(\cos x^2)\;\;sen(\cos(\cos x^2)$

2.- Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x+1}$ Determine:

f) (2 punto) Dominio de la función
$\{\forall x\in\Re\,/\,x\neq -1\}$

g) (2 punto.) Intersecciones con los ejes
Los puntos (1,0) y (0,1)

h) (2 puntos.) Asíntotas
Asíntota Vertical $x=-1$

Asíntotas Oblicuas

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2+x}=1=m$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1-x^2-x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+1}{x+1}=-3$$

Por lo tanto $y=x-3$ es una Asíntota Oblicua.

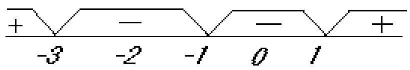
i) (2 puntos.) Puntos Críticos:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+1)-(x^2-2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

Puntos Críticos Estacionarios $x = 1$ y $x = -3$

j) (3 puntos.) Intervalos de Crecimiento o Decrecimiento

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$



La función f Crece en $(-\infty,-3)$ y en $(1,+\infty)$. Decrece $(-3,-1)$ y en $(-1,1)$

g) . (2 puntos) Extremos: Puntos Máximos y Mínimos

Como $f'(-3) = 0$ y $f''(-3) < 0$; $f'(1) = 0$ y $f''(1) > 0$ por el Criterio de la Segunda Derivada la función adquiere un máximo en el punto (-3,-1) y un mínimo en el punto (1,0)

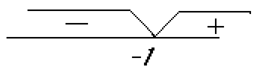
h) (2 puntos) Puntos de inflexión.

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x-3)(2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{8}{(x+1)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ No existen puntos de inflexión

l) (2 puntos) Concavidades

$$f''(x) = \frac{8}{(x+1)^3}$$



La función $f(x)$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty,-1)$ y es Cóncava hacia arriba en el intervalo $(-1,+\infty)$

m) (3 puntos) Elabore la gráfica.

3. Se tiene que $-4x^3y^2 = Sen(x+y)$

$$-12x^2y^2 - 4x^3 2y\frac{dy}{dx} = (1+\frac{dy}{dx})Cos(x+y)$$

$$-12x^2y^2 - 4x^3 2y\frac{dy}{dx} = Cos(x+y) + \frac{dy}{dx}Cos(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx}(Cos(x+y) + 8x^3y) = -12x^2y^2 - Cos(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-12x^2y^2 - Cos(x+y)}{Cos(x+y) + 8x^3y}$$

(6 puntos)

4.-Muestre que entre todos los rectángulos de área dada el cuadrado es el de perímetro mínimo. (6 puntos)

Sean x e y las dimensiones del rectángulo, P el perímetro y A el área.

El perímetro de un rectángulo viene dado por P = 2x + 2y y el área $A = xy$ (con A fijo y P variable).

$$y = \frac{A}{x} \Rightarrow \quad P = 2x + 2.\frac{A}{x}$$

$\frac{dP}{dx} = 2 - \frac{2A}{x^2}$; Si $\frac{dP}{dx} = 0$ se obtiene que $x^2 = A \Rightarrow x = \sqrt{A}$ este es un

valor crítico.

$y = \frac{A}{x} = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$ Por lo tanto el rectángulo es un cuadrado.

$$\frac{d^2P}{d^2x} = \frac{4A}{x^2} > 0$$

Por lo que $x = \sqrt{A}$ es un valor mínimo.